



ردیف	نام و نام خانوادگی دانشجو:	شماره دانشجویی:	نمره
(1)	در لحظه نشان داده شده، اتومبیل $A$ دارای سرعت ثابت $v$ است. همزمان اتومبیل $B$ در حال دور زدن مسیر ربع دایره با سرعت ثابت $v$ است. سرعت و شتاب اتومبیل $B$ را از دید ناظر داخل اتومبیل $A$ حساب کنید؟ شعاع مسیر دایروی اتومبیل $B$ برابر $R$ است. دستگاههای مختصات، بردارهای موقعیت رسم شود و جوابها در دستگاه مختصات کارتزین بیان شوند.		2
(2)	جسمی به جرم $m$ داخل جریان آب می افتد. سرعت جریان آب $v_o$ است. اگر نیروی وارد بر جسم توسط آب، به صورت $F = -k(v - v_o)$ باشد، که در آن $v$ ، سرعت جسم و $k$ ، عدد ثابتی بزرگتر از صفر است. مطلوبست سرعت جسم بر حسب زمان. سرعت اولیه جسم صفر است.		2
(3)	یک ذره به جرم $m$ روی میزی افقی بدون اصطکاک، به دو فنر کاملاً مشابه متصل می باشد. هر دو فنر دارای ثابت $k$ و طول آزاد $L$ می باشند. فنرها در ابتدا تغییر شکل نیافته اند و سپس ذره متصل به فنرها، به اندازه $x$ در امتداد عمود بر چیدمان اولیه فنرها، مطابق شکل کشیده می شود. بردار برآیند نیروی وارده بر ذره از جانب فنرها و انرژی پتانسیل فنری متناظر را بر حسب $L$ ، $x$ و $k$ بدست آورید. فرض کنید مجموعه در چیدمان اولیه دارای پتانسیل صفر است. حرکت ذره فقط در راستای محور $x$ است.		2
(4)	جسم کوچکی در صفحه عمودی از پایین ترین نقطه یک مسیر بدون اصطکاک دایروی با شعاع $R$ با سرعت اولیه $v_0 = \sqrt{5Rg}$ شروع به حرکت می کند و در این مسیر می چرخد. بزرگترین مقدار قطاع دایروی که می توان از مسیر حذف نمود تا همچنان جسم در داخل مسیر جدید به حرکت دورانی خود ادامه دهد چقدر است؟		2

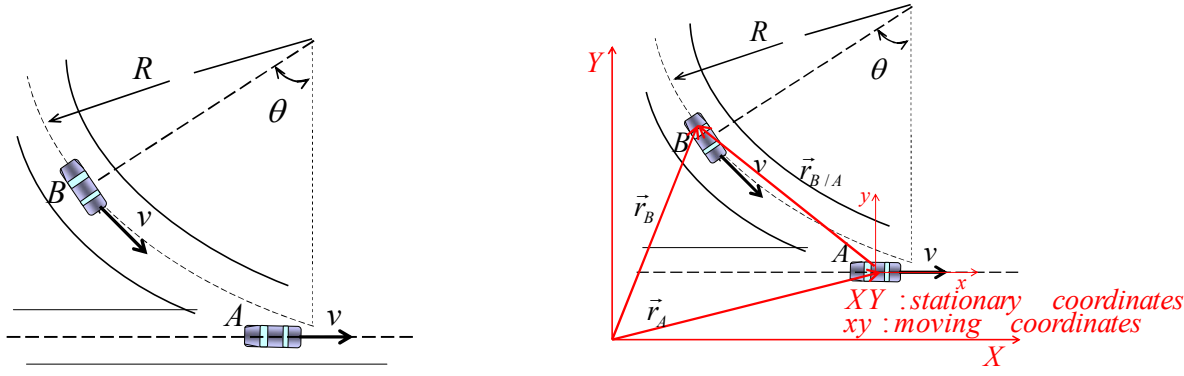


پردیس دانشکده های فنی

استفاده از ماشین حساب مجاز نیست.

استفاده از موبایل مجاز نیست.

(1) در لحظه نشان داده شده، اتومبیل  $A$  دارای سرعت ثابت  $v$  است. همزمان اتومبیل  $B$  در حال دور زدن مسیر ربع دایره با سرعت ثابت  $v$  است. سرعت و شتاب اتومبیل  $B$  را از دید ناظر داخل اتومبیل  $A$  حساب کنید؟ شعاع مسیر دایروی اتومبیل  $B$  برابر  $R$  است. دستگاههای مختصات و بردارهای موقعیت رسم شود و جوابها در دستگاه مختصات دکارتی بیان شوند.



[4]

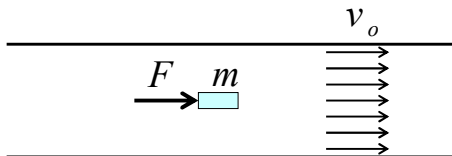
$$\vec{v}_A = v\hat{i} \quad \vec{v}_B = v \cos \theta \hat{i} - v \sin \theta \hat{j} \quad m/s \quad [4]$$

$$\vec{v}_B = \vec{v}_{B/A} + \vec{v}_A \Rightarrow v \cos \theta \hat{i} - v \sin \theta \hat{j} = \vec{v}_{B/A} + v\hat{i} \Rightarrow \vec{v}_{B/A} = (v \cos \theta - v)\hat{i} - v \sin \theta \hat{j} \quad [4]$$

$$\vec{a}_B = a_{Bt}\vec{e}_t + a_{Bn}\vec{e}_n = 0\vec{e}_t + \frac{v^2}{R}\vec{e}_n = \frac{v^2}{R}\vec{e}_n = \frac{v^2}{R} \sin \theta \hat{i} + \frac{v^2}{R} \cos \theta \hat{j} \quad [4]$$

$$\vec{a}_B = \vec{a}_{B/A} + \vec{a}_A \Rightarrow \frac{v^2}{R} \sin \theta \hat{i} + \frac{v^2}{R} \cos \theta \hat{j} = \vec{a}_{B/A} + 0 \Rightarrow \vec{a}_{B/A} = \frac{v^2}{R} \sin \theta \hat{i} + \frac{v^2}{R} \cos \theta \hat{j} \quad [4]$$

(2) جسمی به جرم  $m$  داخل جریان آب می افتد. سرعت جریان آب  $v_o$  است. اگر نیروی وارد بر جسم توسط آب، به صورت  $F = -k(v - v_o)$  باشد، که در آن  $v$ ، سرعت جسم و  $k$ ، عدد ثابتی بزرگتر از صفر است. مطلوبست سرعت جسم بر حسب زمان. سرعت اولیه جسم صفر است.

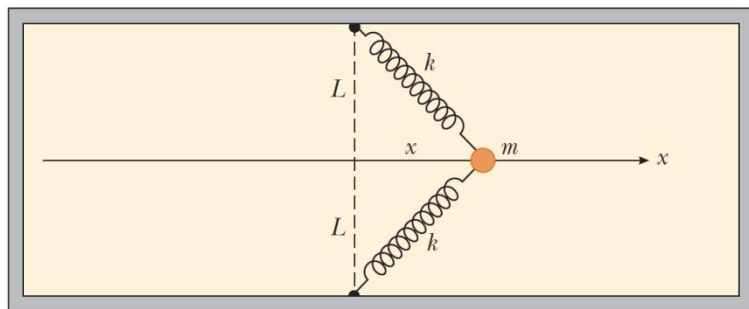


$$(I) \quad \sum F_x = ma_x \quad \text{or} \quad F = ma_x \quad \text{or} \quad -k(v - v_o) = m \frac{dv}{dt} \quad [5]$$

$$(II) \quad -\frac{k}{m} dt = \frac{dv}{(v - v_o)} \Rightarrow \int_0^t -\frac{k}{m} dt = \int_0^v \frac{dv}{(v - v_o)} \Rightarrow \quad [5]$$

$$-\frac{kt}{m} = \ln \frac{v - v_o}{0 - v_o} \quad \text{or} \quad \frac{v - v_o}{-v_o} = e^{\frac{-kt}{m}} \Rightarrow v(t) = v_o(1 - e^{\frac{-kt}{m}}) \quad [10]$$

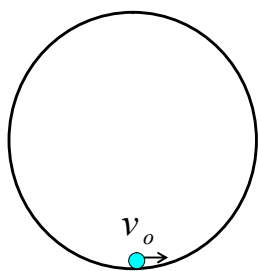
(3) یک ذره به جرم  $m$  روی میزی افقی بدون اصطکاک، به دو فنر کاملاً مشابه متصل می باشد. هر دو فنر دارای ثابت  $k$  و طول آزاد  $L$  می باشند. فنرها در ابتدا تغییر شکل نیافته اند و سپس ذره متصل به فنرها، به اندازه  $x$  در امتداد عمود بر چیدمان اولیه فنرها، مطابق شکل کشیده می شود. بردار برآیند نیروی وارده بر ذره از جانب فنرها و انرژی پتانسیل فنری متناظر را بر حسب  $L$ ،  $x$  و  $k$  بدست آورید. فرض کنید مجموعه در پیکربندی اولیه دارای پتانسیل صفر است.



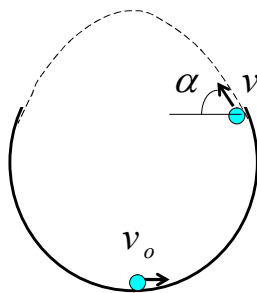
$$(I) \quad U(x) = 2 \times \frac{1}{2} k [\sqrt{x^2 + L^2} - L]^2 = k [(x^2 + L^2) + (L^2) - 2L\sqrt{x^2 + L^2}] = k [x^2 + 2L^2 - 2L\sqrt{x^2 + L^2}]$$

$$(II) \quad \vec{F} = -\frac{\partial U}{\partial x} \hat{i} = -2kx \left(1 - \frac{L}{\sqrt{x^2 + L^2}}\right) \hat{i} \quad [10+10]$$

(4) جسم کوچکی در صفحه عمودی از پایین ترین نقطه یک مسیر بدون اصطکاک دایروی با شعاع  $R$  با سرعت اولیه  $v_0 = \sqrt{5Rg}$  شروع به حرکت می کند و در این مسیر می چرخد. بزرگترین مقدار قطاع دایروی که می توان از مسیر حذف نمود تا همچنان جسم در داخل مسیر جدید به حرکت دورانی خود ادامه دهد چقدر است؟

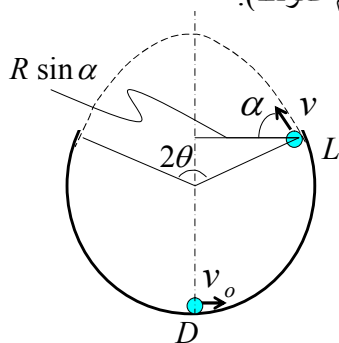


before removing a part of circular track



after removing a part of circular track

اگر زاویه مرکزی بخش کنده شده را  $2\theta$  فرض کنیم. اولاً  $\theta$  برابر  $\alpha$  است (اضلاع دو زاویه بر هم عمودند).



[5]

زمان صعود پرتابه برابر است با:

$$(I) \quad t_a = \frac{v \sin \alpha}{g}$$

فاصله افقی طی شده در طی این زمان برابر است با:

$$(II) \quad v \cos \alpha \cdot t_a = \frac{v \cos \alpha \cdot v \sin \alpha}{g} = R \sin \alpha \Rightarrow \cos \alpha = \frac{Rg}{v^2}$$

از نوشتن رابطه کار و انرژی برای ذره بین نقاط  $L$  &  $D$  خواهیم داشت:

$$(III) \quad W = \Delta K + \Delta U \quad \text{or} \quad 0 = \left(\frac{1}{2}mv^2 - \frac{1}{2}mv_0^2\right) + mgR(1 + \cos \alpha) \Rightarrow v^2 = v_0^2 - 2Rg(1 + \cos \alpha)$$



پردیس دانشکده های فنی

استفاده از ماشین حساب مجاز نیست.

استفاده از مداد و اتود و موبایل مجاز نیست.

با جاگذاری  $v^2$  در معادله (II)، و جاگذاری  $v_0 = \sqrt{5Rg}$  خواهیم داشت:

$$(IV) \quad \cos \alpha = \frac{Rg}{v_0^2 - 2Rg(1 + \cos \alpha)} \Rightarrow \cos^2 \alpha + \left(1 - \frac{v_0^2}{2Rg}\right) \cos \alpha + \frac{1}{2} = 0 \Rightarrow \cos^2 \alpha - \frac{3}{2} \cos \alpha + \frac{1}{2} = 0$$

$$(V) \quad \cos \alpha_1 = 1 \quad ; \quad \cos \alpha_2 = 0.5 \Rightarrow \varphi_1 = 2\alpha_1 = 0^\circ \quad \text{and} \quad \varphi_2 = 2\alpha_2 = 120^\circ = \frac{2\pi}{3} \Rightarrow s = R\varphi = \frac{2\pi R}{3}$$

[3+3+3+3+3]